

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МАГИСТРАТУРУ
ПО КОНКУРСНЫМ ГРУППАМ ФРКТ**

Структура программы: Программа состоит из двух разделов. Поступающие по конкурсным группам "Neural Networks and Neural Computers" и "Cyber Security" сдают вступительное испытание в соответствии с разделом 1 программы, поступающие по конкурсной группе "Предпринимательство в сфере наукоемких технологий" - в соответствии с разделом 2.

Раздел 1

Форма: устная с письменным заданием.

Продолжительность письменной части: 45 мин.

Продолжительность устной части: до 45 мин. Устная часть предполагает обсуждение результатов письменной работы и беседу по теоретическим вопросам программы.

Правила проведения: при подготовке письменного задания разрешается использовать печатные учебники, статьи, печатные и электронные справочники. Во время устного ответа все источники, кроме собственноручно написанных, запрещены. Все интерактивные источники строго запрещены, включая поисковые системы, чаты и другие.

А. Теоретические вопросы.

Пожалуйста опишите и объясните:

1. Геометрия. Как найти площадь фигур в общем виде? Приведите примеры для треугольника, круга, трапеции.
2. Теорема косинусов. Объясните и приведите примеры использования.
3. Тригонометрия. Объясните тригонометрические функции: \sin , \cos , tg . Опишите известные отношения между ними. Приведите примеры расчета.
4. Объясните обратные тригонометрические функции: \arcsin , \arccos , arctg . Приведите примеры расчета.
5. Что такое линейное матрично-векторное уравнение, как решаются матрично-векторные уравнения? Опишите известные прямые и итерационные методы решения матрично-векторных уравнений.
6. Что такое матричные операции? Объясните, как считаются матричные умножения, возведение матрицы в степень, обратная матрица, что такое единичная матрица и др.
7. Что такое производная? Как найти производные в аналитическом виде (примеры). Как найти производные вычислительным способом.
8. Цепное правило для нахождения производных. Объясните и приведите примеры.
9. Что такое интеграл? Как найти интегралы аналитическим способом (примеры). Как найти интегралы вычислительным способом.
10. Что такое комплексное число? Мнимая единица? Объясните операции с комплексными числами, сложение, умножение, комплексное сопряжение и др.
11. Что такое оптимизация? Объясните, как найти оптимум функции, приведите примеры методов.
12. Метод градиентного спуска, объясните, как он работает.
13. Что такое вероятность? Приведите примеры функций распределения вероятностей.
14. Как вычислительно оценить вероятность? Приведите примеры.

Письменное задание.

Объясните свое решение пошагово.

15. Найти частные производные функции $z = x \ln y + \frac{y}{x}$

16. Взять интеграл $\int \frac{1}{x^3} dx =$

17. Найти дифференциал функции $z = x \sin(y)$ в точке $P(-1; -\pi/2)$

18. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

19. Поверните вектора $\mathbf{x}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ на 30 градусов.

20. Вычислить производную $f'(x)$ логистической сигмоиды

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

Упростить ответ, используя $f(x)$

Рекомендованная литература

1. M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, C. S. Ong, Mathematics for Machine Learning \\\ To be published by Cambridge University Press. 2020, Available at <https://mml-book.github.io/>
2. G. Strang. Calculus \\\ MA: Wellesley College (1991). Available at <https://ocw.mit.edu/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/>

Раздел 2

Форма: устная с письменным заданием.

Продолжительность письменной части: 3 часа. На письменной части предлагается решить 10 задач.

Продолжительность устной части: до 30 мин. На устной части проходит обсуждение по результатам письменной работы.

Правила проведения: при подготовке письменного задания разрешается использовать вспомогательные материалы: личные записи, справочные материалы, литературу. Нельзя консультироваться с третьими лицами.

1. Последовательности и пределы. Критерий Коши. Леммы Больцано—Вейерштрасса и Гейне—Бореля.
2. Дифференцирование. Правила дифференцирования. Дифференциалы. Теоремы о среднем. Формула Тейлора. Раскрытие неопределенностей.
3. Исследование функции одного переменного с помощью производных: монотонность, экстремумы, выпуклость, перегибы.
4. Функции n переменных. Пространство n измерений. Частные производные и дифференциал. Необходимые условия и достаточные условия дифференцируемости. Дифференциалы высших порядков и ряд Тейлора. Градиент. Векторнозначные функции. Принцип сжимающих отображений. Неподвижные точки операторов.
5. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.
6. Условный экстремум функций нескольких переменных. Оптимизация. Метод множителей Лагранжа (необходимые условия экстремума).

7. Определённый интеграл. Свойства интеграла с переменным верхним пределом: непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сравнения.
9. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Ортогональные разложения.
10. Степенные ряды. Радиус сходимости. Ряд Тейлора.
11. Криволинейные интегралы. Формула Грина.
12. Поверхностные интегралы. Формула Остроградского-Гаусса.
13. Тригонометрический ряд Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.
14. Координаты и векторы. Описание геометрических объектов. Углы между прямыми и плоскостями. Скалярное и векторное произведение.
15. Кривые второго порядка. Эллипс, парабола, гипербола и их свойства.
16. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы.
17. Линейное преобразование конечномерного пространства, его матрица. Замены координат. Собственные векторы и собственные значения, их свойства.
18. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду. Сопряженное пространство. Тензоры.
19. Унитарные матрицы. Жордановы формы. Корневые подпространства
20. Функции от матриц. Нормы векторов и матриц. Сходимость итераций.
21. Постановка задачи линейного программирования
22. Численные методы. Предмет изучения. Ошибки счета и обусловленность. Итерационные методы 191
23. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Методы их решения.
24. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. постоянных. Определитель Вронского, формула Лиувилля-Остроградского.
25. Устойчивость. Второй метод Ляпунова. Уравнение в вариациях. Устойчивость в целом. Диссипативные системы.
26. Колебания. Гармонические сигналы. Вынужденные колебания. Резонансные явления. Связанные системы. Автоколебания. Волны и солитоны.
27. Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
28. Случайная величина и её функция распределения. Математическое ожидание, дисперсия и ковариация случайной величины, их свойства.
29. Функции распределения. Функции случайных величин. Нормальный закон распределения. Пуассоновские потоки.
30. Испытания Бернулли. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.
31. Цепи Маркова. Стохастические матрицы.
32. Случайные функции. Эргодичность. Белый шум. Броуновское движение.
33. Теория информации. Энтропия. Информационная точка зрения. Частотная интерпретация. Кодирование при отсутствии помех. Канал с шумом.
34. Теория групп. Группа подстановок. Смежные классы. Нормальные делители и факторгруппы. Классы сопряженных элементов. Автоморфизмы и гомоморфизмы. Преобразования и симметрия. Группы преобразований.
35. Алгоритмы и вычислимость. Машины Тьюринга
36. Математическая логика. Переменные, связки и функции. Булева алгебра. Формулы, высказывания, предикаты. Синтаксис и семантика. Интерпретации и модели

Рекомендованная литература

1. Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа.
2. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа.
3. Г. Е. Иванов. Лекции по математическому анализу.
4. А. Е. Умнов. Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
5. В. И. Чехлов. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре.
6. Д. В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
7. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
8. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений.
9. М. В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
10. В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, Теория вероятностей.
11. В. П. Чистяков. Курс теории вероятностей.
12. В.Босс. Лекции по математике. Том 01.
13. В.Босс. Лекции по математике. Том 01.
14. В.Босс. Лекции по математике. Том 02.
15. В.Босс. Лекции по математике. Том 03.
16. В.Босс. Лекции по математике. Том 04.
17. В.Босс. Лекции по математике. Том 06.
18. В.Босс. Лекции по математике. Том 08.